

# Embedded Systems 2

DRAFT – Abschnitt 8

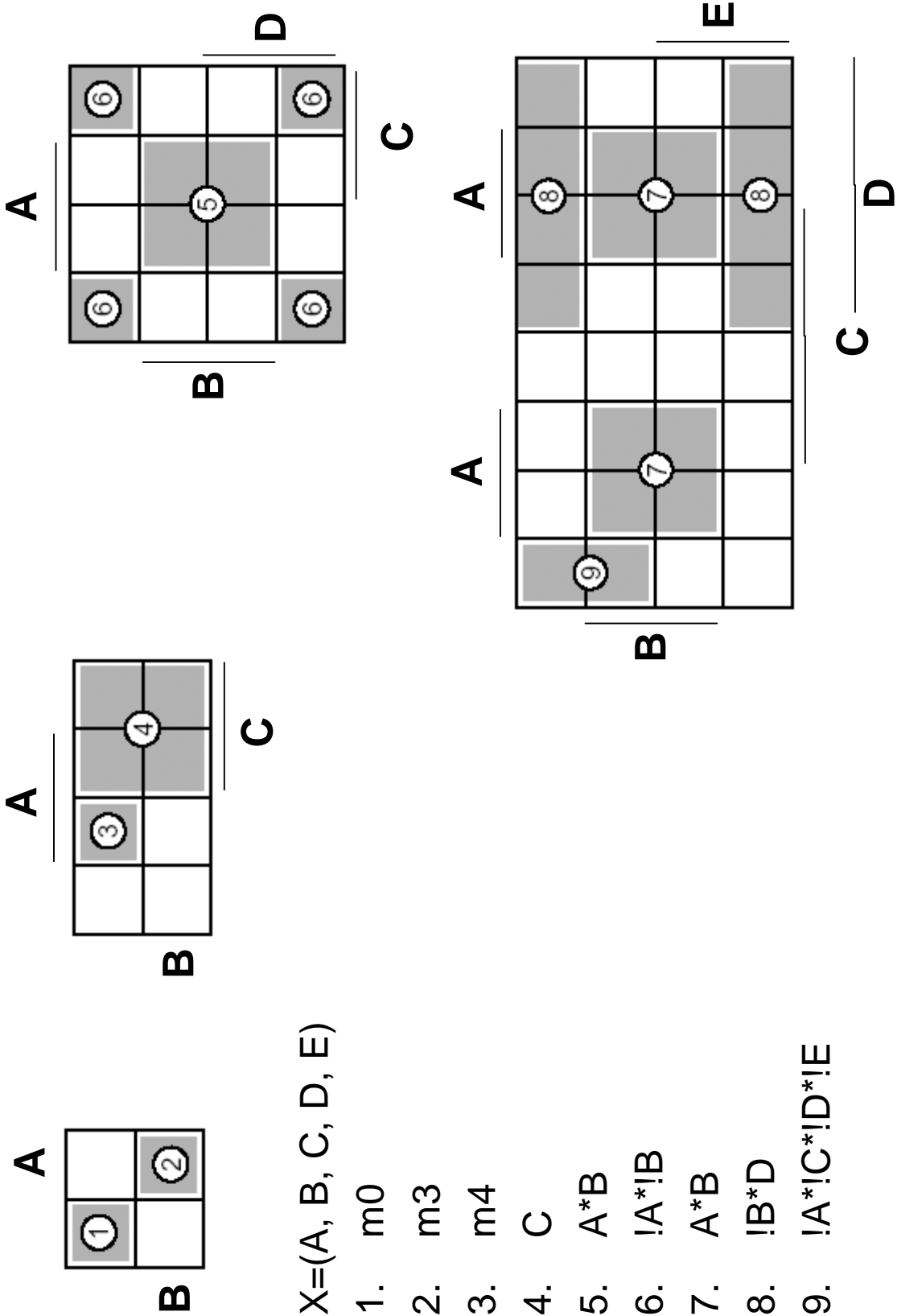
Prof. Dr. Volkhard Klinger

# Minterme und Maxterme

---

- Es existieren Boolesche Funktionen, die schon von der reinen Anschauung her (KV-Diagramm) sehr einfach aufgebaut sind. Es sind dies Funktionen, die nur einen einzigen Wert '0' bzw. '1' enthalten. In diesem Sinne kann die Funktion, die nur eine einzige '1' enthält als minimal angesehen werden, die Funktion mit einer einzigen '0' entsprechend als maximal.
- Definition:
  - Minterm-Funktion: diese Funktion erzeugt nur eine einzige '1'
  - Maxterm-Funktion: diese Funktion erzeugt nur eine einzige '0',
  - Diese Funktionen werden oft einfach als Minterm bzw. Maxterm bezeichnet
  - Im KV-Diagramm stellen sich diese Boolesche Funktionen anschaulich wie folgt dar:
    - ♦ ein Minterm ist ein Einzelfeld mit 1-Eintrag ( $m_i$ )
    - ♦ ein Maxterm ist ein Einzelfeld mit 0-Eintrag ( $M_i$ )
    - ♦ Der Index  $i$  kennzeichnet das entsprechende, ausgezeichnete Feld und wird durch die Wertigkeit der Argumente ( $A, B, C, \dots$ ) bestimmt

# KV-Diagramm



# Minterme und Maxterme

---

- Eine beliebige Boolesche Funktion kann durch einstufige Verknüpfungen von Mintermen bzw. Maxtermen dargestellt werden
- Definition der kanonischen Normalformen:
  - Kanonische disjunktive Normalform (kDNF)  
In der kanonischen disjunktiven Normalform wird eine Boolesche Funktion durch Disjunktion (ODER-Funktion) ihrer Minterme  $m_i$  dargestellt
  - Kanonische konjunktive Normalform (kKNF)  
In der kanonischen konjunktiven Normalform wird eine Boolesche Funktion durch Konjunktion (UND-Funktion) ihrer Maxterme  $M_i$  dargestellt.
  - Der Begriff "kanonisch" deutet an, daß die Booleschen Funktionen hier in ihrer einfachsten (und aufwendigsten) Form beschrieben wird. D.h. es werden keine Vereinfachungen vorgenommen
- Werden in der Eingangsstufe infolge von Vereinfachungen nicht alle Variablen verknüpft, so wird eine derartige Lösung nicht mehr als "kanonisch" bezeichnet
  - Disjunktive Normalform (DNF)
  - Konjunktive Normalform (KNF)
  - Sowohl eine kDNF als auch eine kKNF werden als zweistufige Schaltungen realisiert

# Minimierung

- Definition: Implikant  
Als Implikant wird ein anschaulicher Feldverbund im KV-Diagramm bzw. der entsprechende algebraische Term bezeichnet. "Implikant" und "Feldverbund" sind in diesem Sinne also synonym.
- Definition: Primimplikant (PI)  
Ein Implikant einer Booleschen Funktion wird als Primimplikant bezeichnet, wenn er in keinem anderen Implikanten vollständig enthalten ist.
- Definition: Kern-Primimplikant (KPI)  
Enthält ein Primimplikant (PI) mindestens eine Vollkonjunktion, die in keinem anderen PI enthalten ist, spricht man von einem Kern-Primimplikanten (KPI).

<u>a      b</u>			
c	0	0	0
	0	0	0
d	0	0	0
	0	0	0

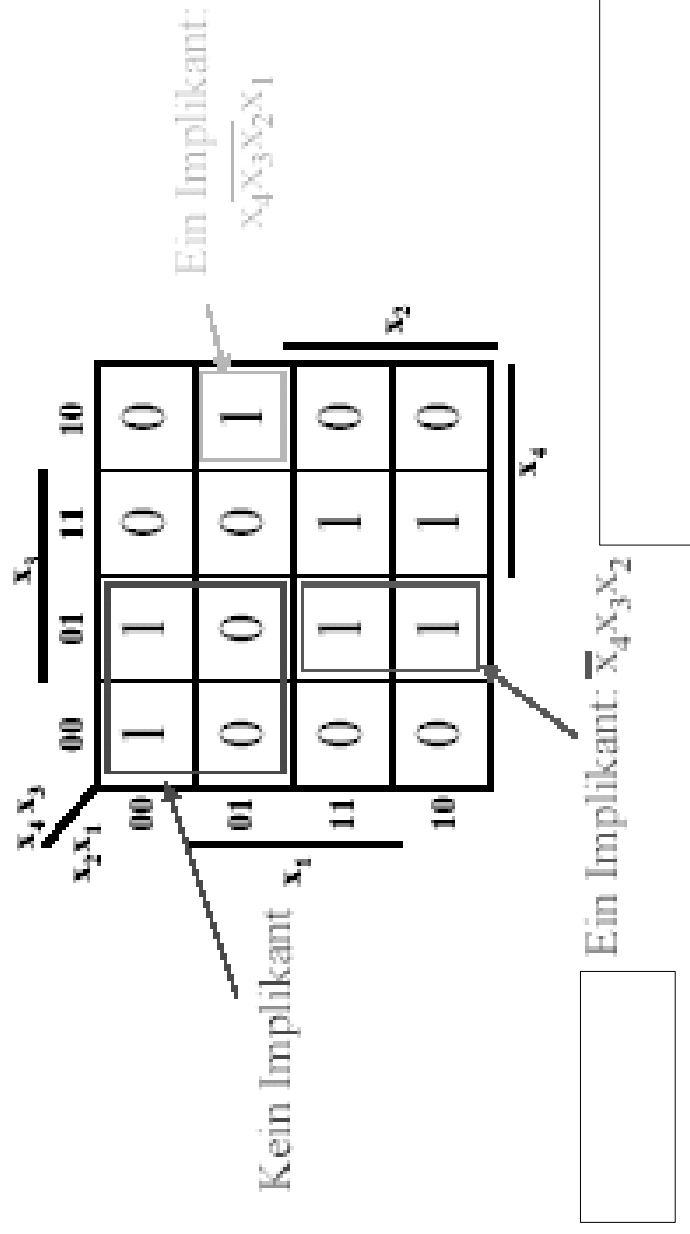
Labels pointing to the table cells:

- Implikant: points to the cell (c=0, d=0, b=1, a=1)
- Primimplikant: points to the cell (c=0, d=0, b=1, a=1)
- Vollkonjunktion: points to the cell (c=0, d=0, b=1, a=1)

## Minimierung

- Definition

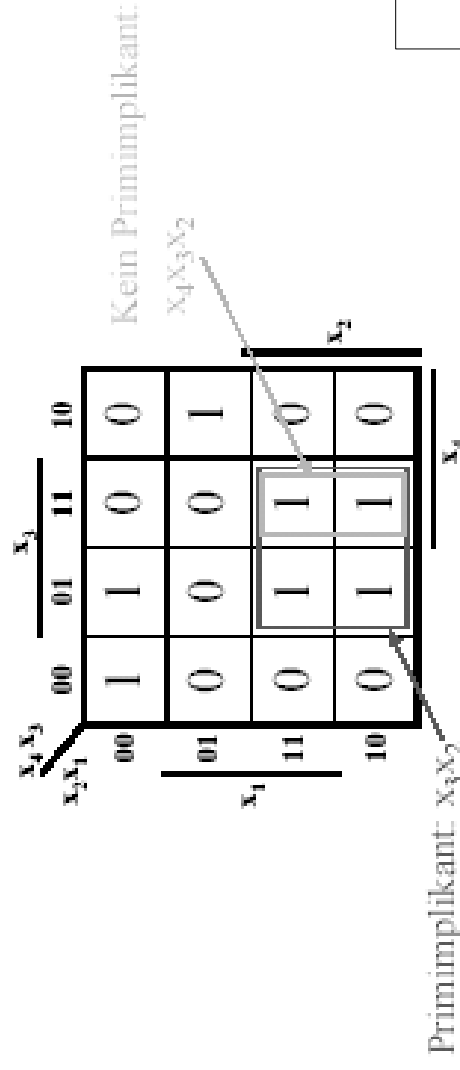
- Ein Implikant einer Funktion  $f$  ist ein Produktterm  $c$  für den gilt  $c \leq f$ , d.h. der Implikant überdeckt mindestens einen oder maximal alle Einsstellen der Funktion  $f$ . Ein Minterm ist damit ein Implikant.



## Minimierung

- Definition

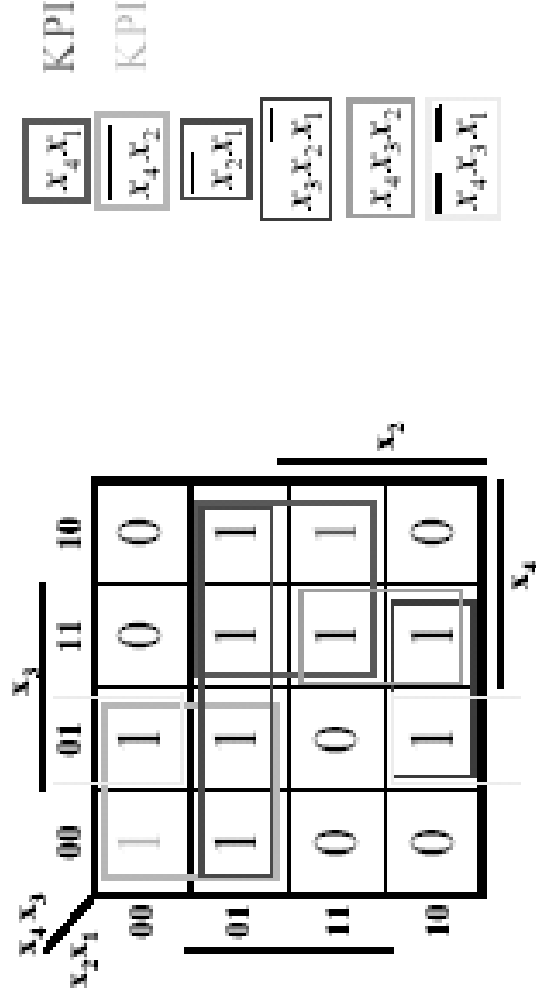
- Ein Primimplikant einer Funktion  $f$  ist ein Produktterm  $p$  für den gilt  $p \leq f$ , d.h. der selbst ein Implikant ist, und für den kein anderer Implikant  $c$  von  $f$  existiert für den  $p \leq c$  gilt.  
D.h., ein Primimplikant wird von keinem anderen Implikanten überdeckt und besitzt damit mindestens eine Einsstelle mehr als die existierenden Implikanten von  $f$ .



## Minimierung

- Definition

- Ein Primimplikant p einer Funktion f heißt Kernprimimplikant (KPI) wenn er von der Disjunktion aller anderen Primimplikanten der Menge  $P' = P \setminus \{p\}$  nicht überdeckt wird. Anschaulich heißt dies, ein KPI oder ein essentieller Primimplikant besitzt mindestens ein Einselement (Minterm) von f, das (der) auch durch die Zusammenfassung aller anderen Primimplikanten sonst nicht dargestellt wird.





# Minimierung

- Regel:
  - Kern-Primimplikanten müssen in einer Schaltungsrealisierung grundsätzlich berücksichtigt werden! Sie bilden also den "Kern" der Schaltung.
  - Primimplikanten können oftmals von einer Realisierung eliminiert werden, allerdings hängt ihre Eliminierbarkeit von weiteren Eigenschaften ab.
- Definition: Absolut eliminierbarer Primimplikant  
Ein PI ist absolut eliminierbar, wenn es für die gegebene Bfkt eine Disjunktion von Kern-PIs gibt, die ihn vollständig enthält.
- Definition: Relativ eliminierbarer Primimplikant  
Ein PI ist relativ eliminierbar, wenn er weder einen KPI darstellt noch absolut eliminierbar ist. Ein Teil dieser relativ eliminierbaren PIs muß in der Schaltungsrealisierung verwendet werden.
- Regel
  - Kern-PIs:  
Sie müssen in der Schaltungsrealisierung unbedingt berücksichtigt werden
  - Relativ eliminierbare PIs:  
Nur eine Teilmenge muß berücksichtigt werden
  - Absolut eliminierbare PIs:  
Die Berücksichtigung dieser PIs ist nicht notwendig
- Sämtliche für 1-Feldverbunde formulierte Regeln gelten in äquivalenter Form auch für 0-Feldverbunde

# Minimierung

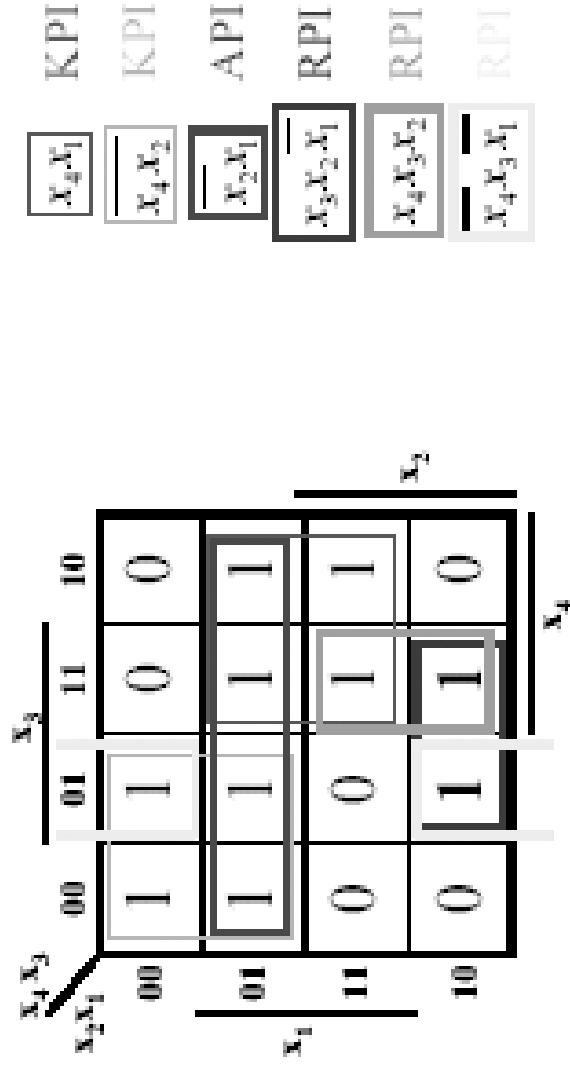
---

- Alle Minterme müssen überdeckt werden
- Manche Minterme werden von mehreren Primimplikanten überdeckt
- Diejenigen Primimplikanten, die Minterme überdecken, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt werden, sind notwendige Bestandteile einer Realisierung und heißen Kern-Primimplikanten
- Alle Primimplikanten, die von den Kern-Primimplikanten überdeckt werden, können weggelassen werden
  - Absolut eliminierbare Primimplikanten
- Diejenigen Primimplikanten, die Minterme überdecken, die von keinem Kern-Primimplikanten überdeckt werden, ihrerseits aber keine Kern-Primimplikanten sind, heißen:
  - Relativ eliminierbare Primimplikanten

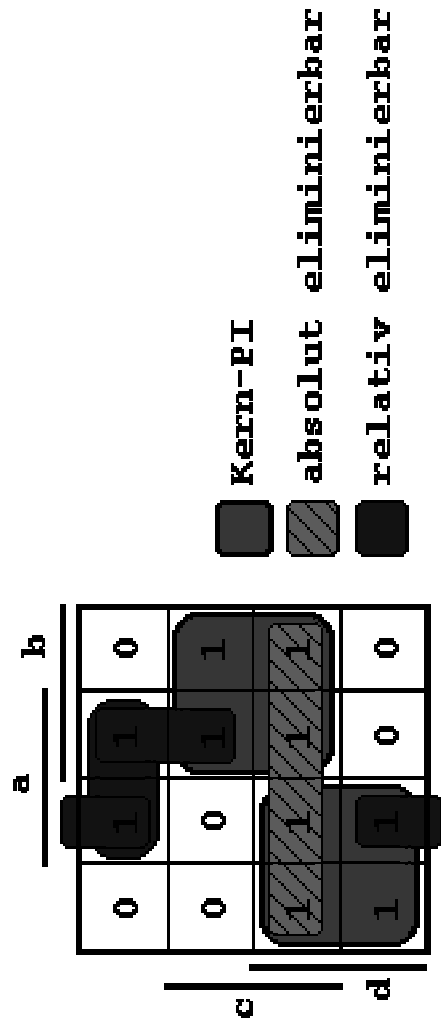
# Minimierung

- Definition

- Definition 4.4: Ein Primimplikant p einer Funktion f heißt absolut eliminierbarer Primimplikant (API) wenn er von der Disjunktion aller Kernprimimplikanten der Menge PK überdeckt wird. Anschaulich heißt dies, ein API besitzt kein Einselement (keinen Minterm) von f, das (der) nicht bereits durch einen der Kernprimimplikanten überdeckt bzw. dargestellt wird.



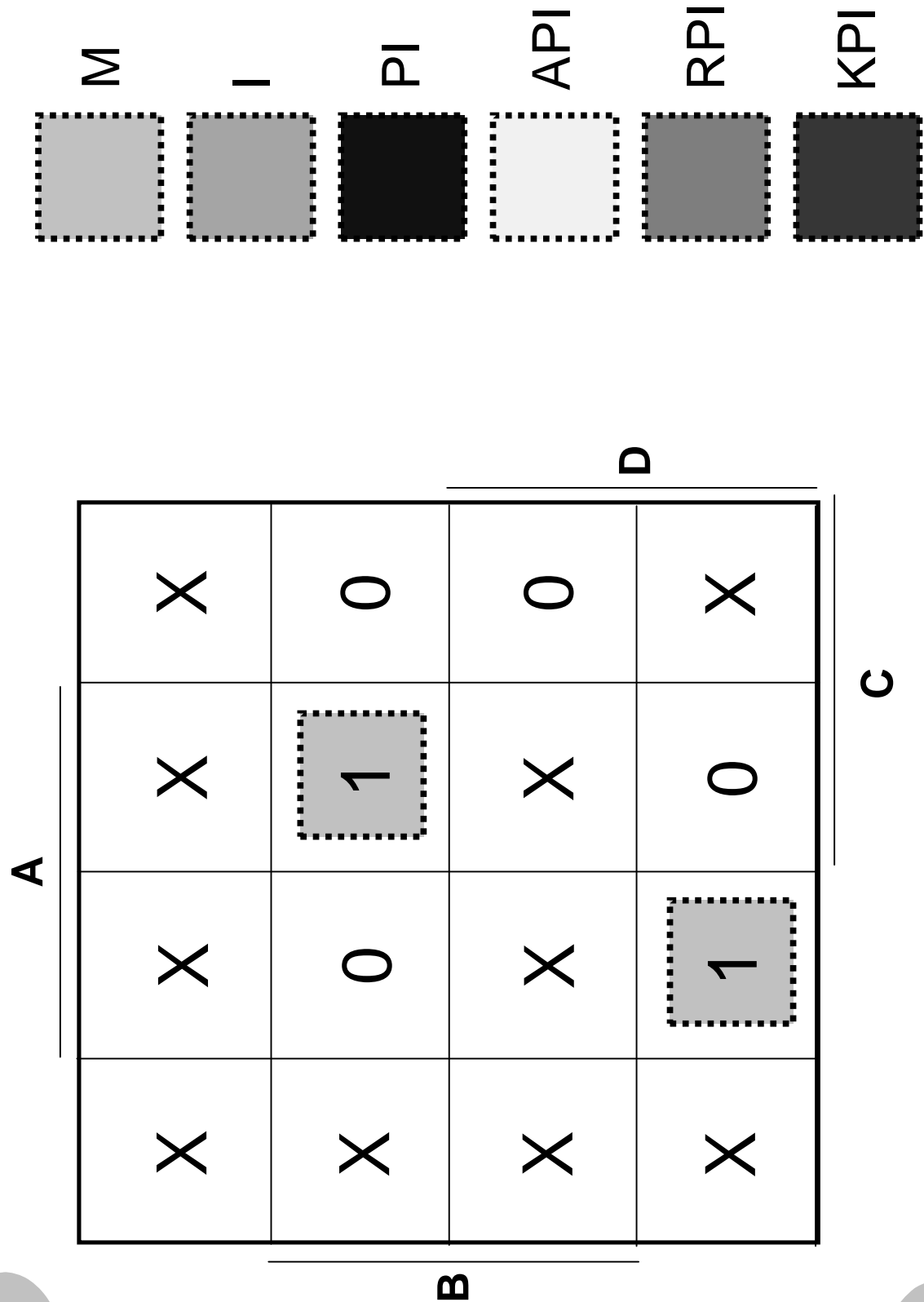
# Minimierung



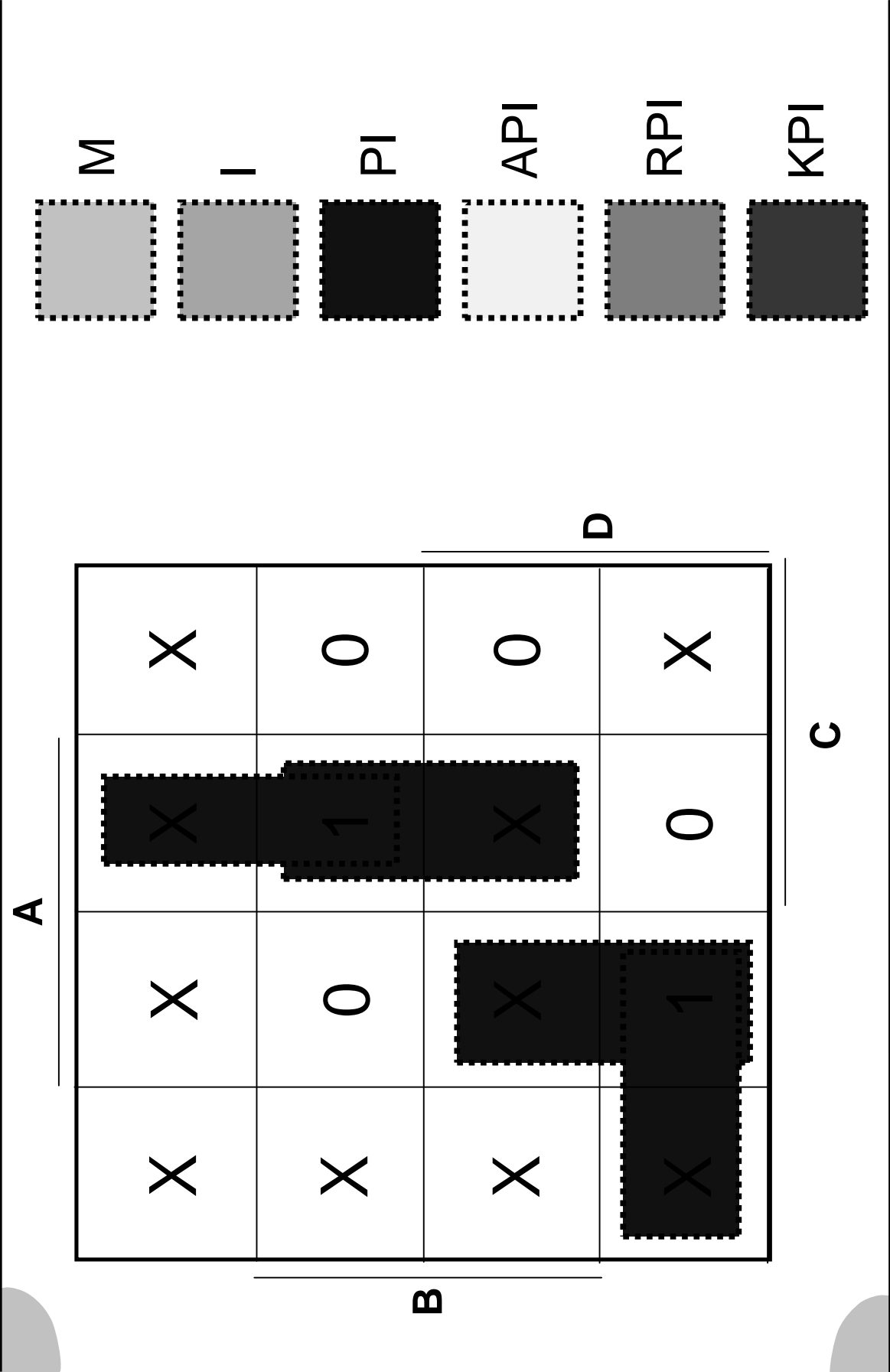
- Definitionen
  - Die Disjunktion aller Primimplikanten heißt Blakesche Normalform. Sie ist ebenfalls eine kanonische Normalform.
  - Sei  $P$  die Menge aller Primimplikanten der Funktion  $f$ . Dann setzt sich die disjunktive Minimalform DMF aus einer Disjunktion von Primimplikanten zusammen. Anschaulich ließe sich ja jeder Implikant durch einen Primimplikant mit gleichen oder geringeren Kosten ersetzen und dieser würde daher keinen Eingang in die DMF finden.
  - Eine DNF heißt irredundant, wenn kein Produktterm weggelassen werden kann, ohne die Funktion zu verändern.
  - Sei  $P$  die Menge aller Primimplikanten der Funktion  $f$ . Dann setzt sich die disjunktive Minimalform DMF aus einer Disjunktion aller Kernprimimplikanten KPI aus den Primimplikanten (PR) und einer geeigneten Auswahl relativ eliminierbarer Primimplikanten RPI aus PR zusammen, so dass kein Primimplikant  $p$  dieser Disjunktion von der übrigen Menge aller Primimplikanten überdeckt wird.
    - ♦ Erfüllen mehrere DNF diese Bedingung (irredundante DNF) so ist die DNF mit geringsten Kosten als DMF auszuwählen

Implikanten

A				M	I	PI	API	RPI	KPI
X	X	X	X						
X	0	1	0						
X	X	X	0						
X	X	0	X						



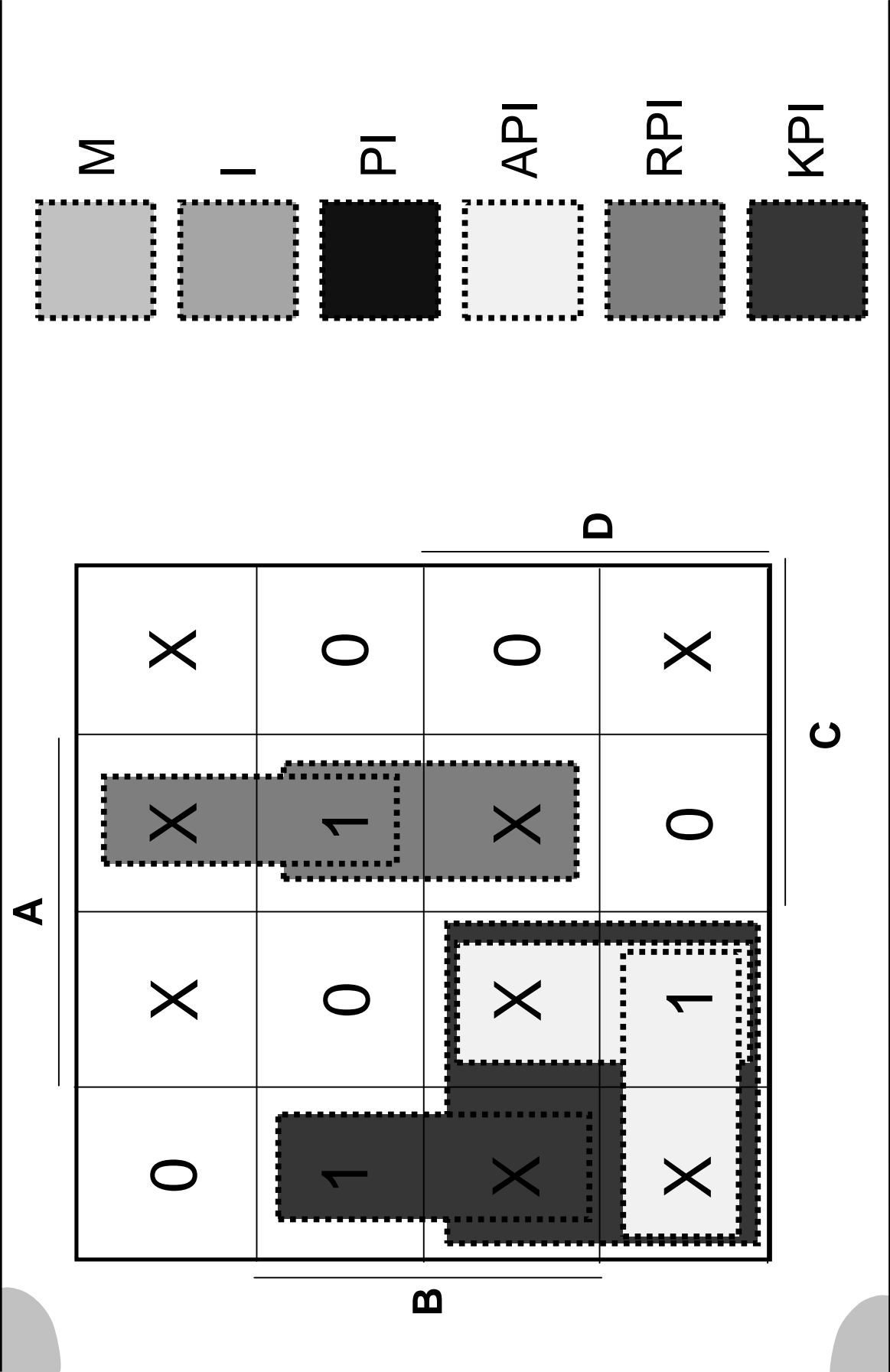
Implikanten







Implikanten



## Minterme und Maxterme

---

- Def: Bei einer vollständig definierten Funktion  $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist jedem Wert von  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  genau ein Wert von  $y$  zugeordnet. Ist das nicht der Fall, so spricht man von unvollständig definierten Funktionen.
- Während eine kombinatorische Funktion unvollständig definiert sein kann für einen Wert  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , besitzt der Ausgang jeder digitalen Schaltung für jeden Wert von  $x$  den Wert 0 oder den Wert 1.
- Regel zur Vereinfachung einer Schaltfunktion  $F$  in disjunktiver Normalform
  - Man bestimme der Reihe nach alle Terme, die
    1. Einfach-Feldern entsprechen, die nicht in einem Zweifach-Feld enthalten sind,
    2. Zweifach-Feldern entsprechen, die nicht in einem Vierfach-Feld enthalten sind,
    3. Vierfach-Feldern entsprechen, die nicht in einem Achtfach-Feld enthalten sind,
    4. Achtfach-Feldern entsprechen, die nicht . . .

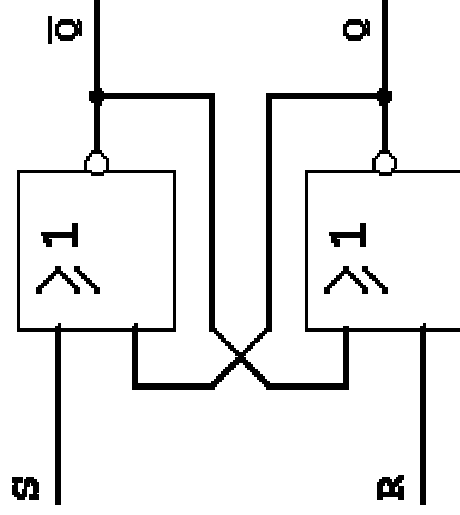
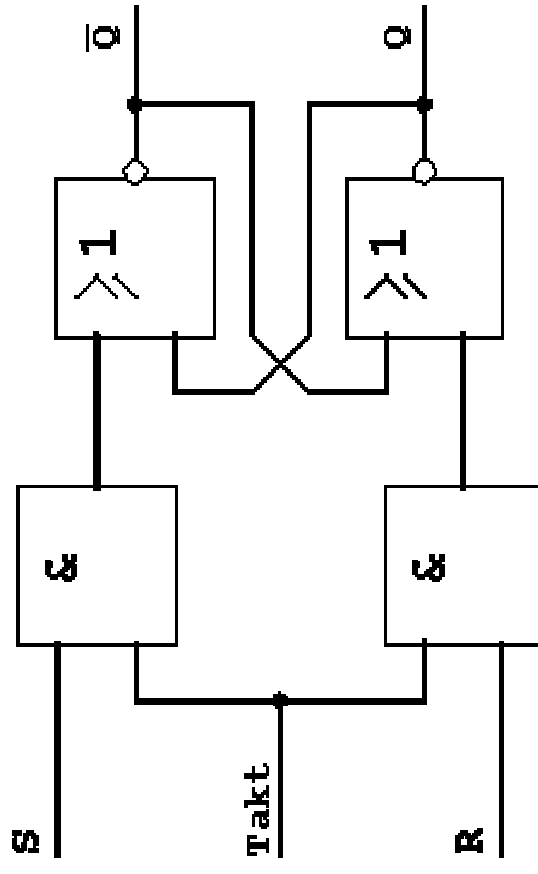
# Schaltnetz

---

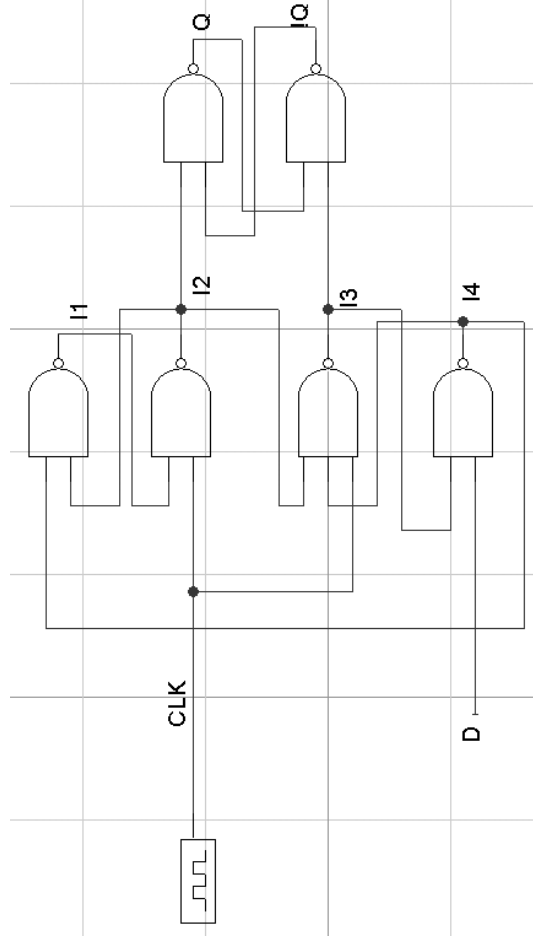
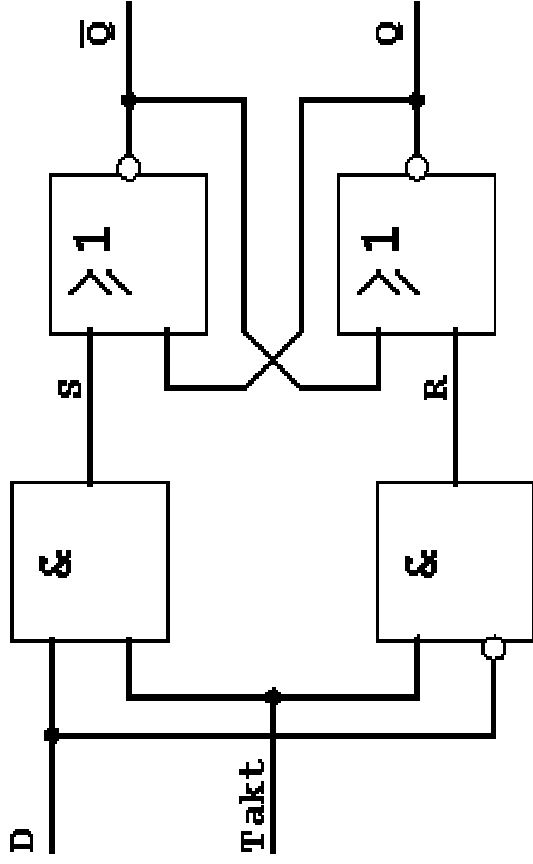
- Schaltnetz (combinational circuit, combinatorial circuit)  
Eine Funktionseinheit zum Verarbeiten von Schaltvariablen, bei der die Werte aller Schaltvariablen am Ausgang (Ausgangsvariablen) zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  nach Verstreichen der Lauf- und Verzögerungszeit  $\Delta t$  nur abhängen von den Werten aller Schaltvariablen am Eingang (Eingangsvariablen) zum Zeitpunkt  $t_0 - \Delta t$ .
  - Anmerkung:  
Ein Schaltnetz hat keine inneren Zustände. Es enthält keine Speicherglieder. Der Ausdruck Schaltkreis anstelle von Schaltnetz ist als mißverständlich zu vermeiden.
  - Schaltnetze
    - ♦ = digitale Schaltungen ohne Speicher
    - ♦ = kombinatorische Logik
    - ♦ = Vektoren boolescher Funktionen

- Schaltwerk (sequential circuit)  
Eine Funktionseinheit zum Verarbeiten von Schaltvariablen, bei der die Werte aller Schaltvariablen am Ausgang (Ausgangsvariablen) zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_0$  nach Verstreichen der Lauf- und Verzögerungszeit  $\Delta t$  abhängen von den Werten aller Schaltvariablen am Eingang (Eingangsvariablen) zum Zeitpunkt  $t_0 - \Delta t$  und zu endlich vielen vorangegangenen Zeitpunkten sowie gegebenenfalls vom Anfangszustand.
  - Anmerkung:  
Ein Schaltwerk hat eine endliche Anzahl von inneren Zuständen und ist, abstrakt gesehen, ein endlicher Automat. Falls keine besonderen Vorkehrungen getroffen werden, können Schaltwerke beim Einschalten einen unbestimmten Anfangszustand annehmen.
  - Schaltwerke (finite state machine, FSM)
    - ♦ = Schaltnetze + Speicher für Zustandsvariablen + Rückführung der Ausgangsvariablen auf den Eingang + Taktgeber

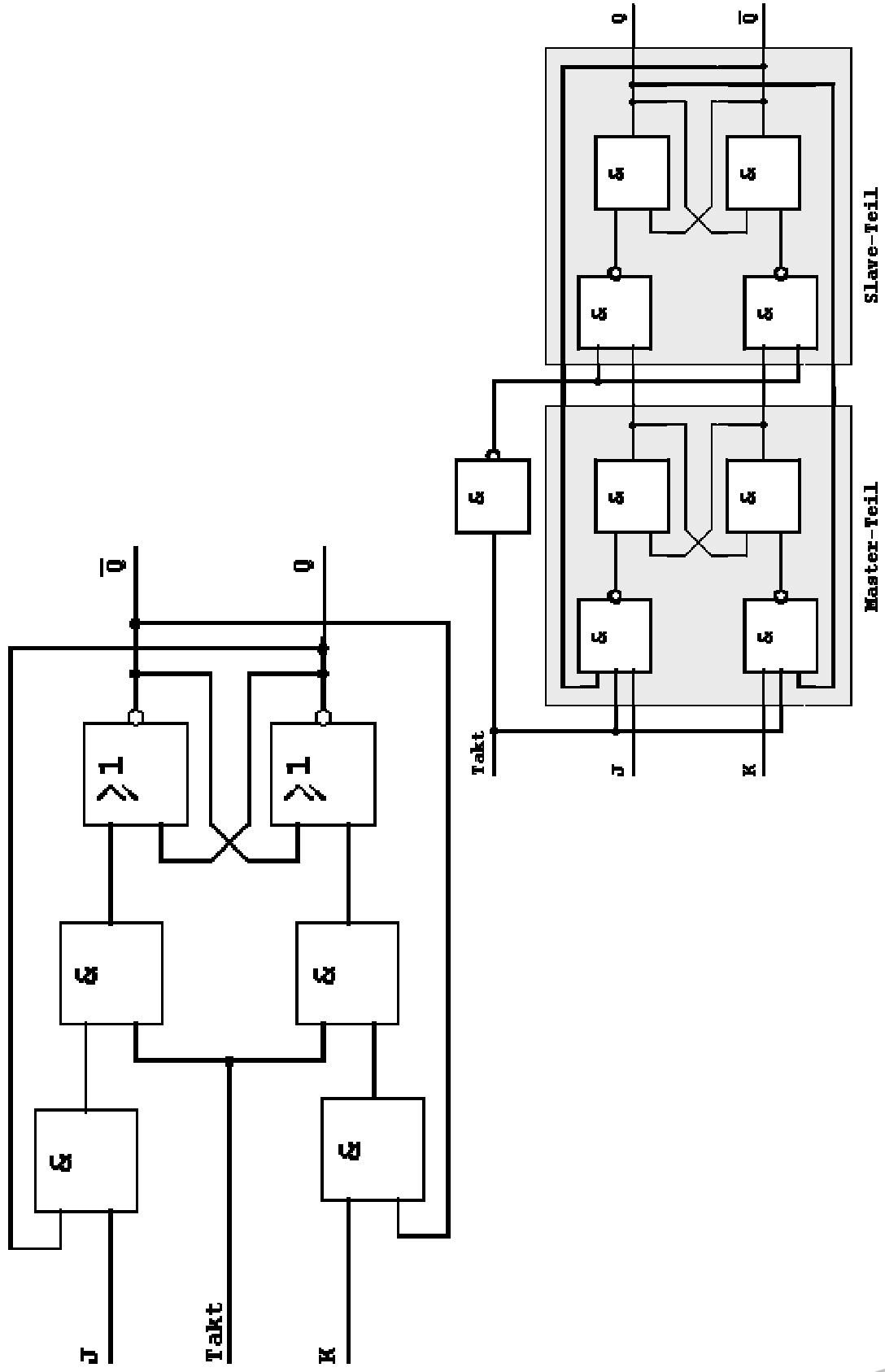
## FlipFlop-Typen: RS



# FlipFlop-Typen: D

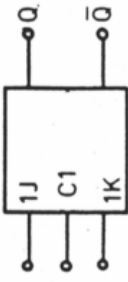

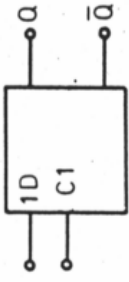
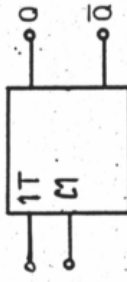


# FlipFlop-Typen: JK





# FlipFlop-Typen: Übersicht

Flipflop-typ	Schaltzeichen	Zustands-tabelle	charakteristische Gleichung
JK-FF		$\begin{array}{c c} J^n & K^n & Q^{n+1} \\ \hline 0 & 0 & Q^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \bar{Q}^n \end{array}$	$Q^{n+1} = \bar{K}^n Q^n \vee J^n \bar{Q}^n$
RS-FF		$\begin{array}{c c} S^n & R^n & Q^{n+1} \\ \hline 0 & 0 & Q^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \# \end{array}$ <p>#verboten</p>	$Q^{n+1} = \bar{R}^n Q^n \vee S^n$ mit $RS=0$
D-FF		$\begin{array}{c c} D^n & Q^{n+1} \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$	$Q^{n+1} = D^n$
T-FF		$\begin{array}{c c} T^n & Q^{n+1} \\ \hline 0 & Q^n \\ 1 & \bar{Q}^n \end{array}$	$Q^{n+1} = \bar{T}^n Q^n \vee T^n \bar{Q}^n$

# FlipFlop-Typen: Übersicht

		Flipflop-Art			
Takt	Steuerung	RS	JK	D	T (datenlos)
ungetaktet	Zustands- Steuerung				
ungetaktet	Flanken- Steuerung				
getaktet	Einzustands- Steuerung				
getaktet	Zweizustands- Steuerung				
getaktet	Einflanken- Steuerung				
getaktet	Zweiflanken- Steuerung				